

SIFAT-SIFAT DASAR INTEGRAL HENSTOCK
(Basic Properties of Henstock Integral)

LEXY JANZEN SINAY, MOZART WINSTON TALAKUA

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: lexyz@gmail.com

ABSTRACT

This paper was a review about theory of Henstock integral. Riemann gave a definition of integral based on the sum of the partitions in Integration area (interval $[a, b]$). Those partitions is a δ -positive constant. Independently, Henstock and Kurzweil replaces δ -positive constant on construction Riemann integral into a positive function, ie $\delta(x) > 0$ for every $x \in [a, b]$. This function is a partition in interval $[a, b]$. From this partitions, we can defined a new integral called Henstock integral. Henstock integral is referred to as a complete Riemann integral, because the basic properties of the Henstock integral is more constructive than Riemann Integral.

Keywords: *Henstock Integral, Partitions, Riemann Integral, δ -Positive Constant*

PENDAHULUAN

Sekitar tahun 1670, Kalkulus berhasil ditemukan, dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan Kalkulus adalah Newton dan Leibniz. Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan Teorema Fundamental, yaitu mengenai antiderivatif. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu.

Pada tahun 1854, Bernhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat simpel untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut integral Riemann.

Kemudian pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi integral Riemann dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan integral Riemann. Teori integral yang dikemukakan oleh Darboux masih memiliki kekurangan.

Pada tahun 1902 Henry Lebesgue (1875-1974) menemukan suatu pendekatan baru untuk integrasi, yang mana metode tersebut mengatasi kekurangan-kekurangan yang dimiliki oleh integral-integral sebelumnya, terutama

mengatasi kekurangan pada integral Riemann. Metode integral tersebut sering disebut integral Lebesgue.

Kemudian, secara terpisah ada beberapa tokoh yang melakukan penelitian tentang teori integral (terutama integral Riemann) dan berhasil mendefinisikan teori-teori integral yang lebih konstruktif. Tokoh-tokoh tersebut adalah Arnaud Denjoy (1912), Oscar Perron (1914), Ralph Henstock dan Jaroslav Kurzweil pada dekade 1950-1960. Secara mendasar, metode integral yang ditemukan oleh para tokoh-tokoh tersebut ekuivalen, namun integral Henstock (Henstock-Kurzweil) lebih unggul dibandingkan integral Denjoy-Perron.

Berdasarkan hal ini maka penulis sangat tertarik dan menganggap perlu untuk mengulas kembali tentang definisi dari integral Henstock dan sifat-sifat dasar integral yang berlaku pada integral Henstock.

TINJAUAN PUSTAKA

Dekade 1950-1960, masing-masing secara terpisah (independen) yaitu Henstock dan Kurzweil mendefinisikan integral baru. Teori integral tersebut merupakan generalisasi dari integral Riemann dengan mengubah konstruksi δ pada integral Riemann, sehingga dibentuk suatu partisi yang baru pada daerah pengintegralannya. Dengan demikian formula tersebut lebih konstruktif (Thobirin, 1997). Teori integral tersebut

juga lebih mudah dari integral Denjoy maupun integral Peron. Pada umumnya, teori tersebut disebut integral Henstock-Kurzweil yang sering juga disebut integral Henstock sangat mudah dibandingkan integral Lebesgue dan definisinya agak berbeda dari integral Riemann. (Schechter, 2001).

Berikut ini akan diberikan beberapa pengertian dan sifat yang akan digunakan dalam pembahasan.

Teorema 1 (Teorema Heine-Borel) [Royden (1987)]

Jika ϕ liput terbuka suatu himpunan tertutup dan terbatas F dalam \mathbb{R} , sedemikian sehingga $F \subset \bigcup \{O : O \in \phi\}$ maka terdapat liput terbuka bagian berhingga untuk F .

Integral Riemann

Jika a dan b adalah bilangan riil dengan $a < b$ maka terdapat bilangan riil x_1 sehingga $a < x_1 < b$. Karena $x_1 < b$ tentu terdapat bilangan riil x_2 sehingga memenuhi $x_1 < x_2 < b$. Karena $x_2 < b$ maka terdapat bilangan riil x_3 sehingga memenuhi $x_2 < x_3 < b$. Proses ini jika diteruskan akan diperoleh bilangan-bilangan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Jadi untuk setiap interval tertutup $[a, b]$ dapat dibentuk himpunan

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Sehingga dapat dibentuk definisi partisi Riemann seperti di bawah ini.

Definisi 2

a). Untuk setiap bilangan riil a dan b dengan $a < b$ himpunan terurut

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

dengan

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \text{ dan } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

disebut partisi Riemann pada $[a, b]$

Titik x_i dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$ pada D disebut titik partisi (*partition point*) dan $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ disebut titik tag (*tag point*).

b). Norma D , dinotasikan dengan $\|D\|$ adalah bilangan maks $\{x_i - x_{i-1}; i = 1, 2, \dots, n\}$

c). Suatu partisi Riemann D_1 pada $[a, b]$ disebut penghalus partisi Riemann D_2 pada $[a, b]$ jika $D_2 \subset D_1$, artinya setiap titik partisi dalam D_2 termuat juga di dalam D_1 (D_2 lebih halus dari D_1).

Dengan adanya partisi pada $[a, b]$ (partisi Riemann) maka didefinisikan integral Riemann seperti berikut ini.

Definisi 3 (Integral Riemann)

Suatu fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann jika ada bilangan A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

Partisi Riemann pada $[a, b]$ dengan $\|D\| < \delta$ berlaku

$$\left| (D) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon.$$

Selanjutnya bilangan A disebut nilai integral Riemann fungsi f pada $[a, b]$ dan dinotasikan dengan

$$A = (R) \int_a^b f(x) dx$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini akan dibahas mengenai integral Henstock yang sering pula disebut integral Riemann Lengkap (*Complete Riemann Integral*) beserta sifat-sifatnya.

Integral Henstock

Sebelum diuraikan mengenai integral Henstock terlebih dahulu dibahas tentang partisi. Karena integral Henstock didasarkan atas adanya partisi pada daerah pengintegralannya. Partisi tersebut adalah partisi- δ yang dapat dilihat pada definisi berikut ini.

Definisi 4

Diketahui fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diberikan sebuah partisi $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ pada $[a, b]$ yang memenuhi

$$\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i),$$

untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dinamakan partisi- δ (δ -partition atau δ -fine partition) pada $[a, b]$.

Lebih singkat, partisi D dapat ditulis $\{[u, v]; \xi\}$.

Karena integral yang akan didefinisikan berkaitan dengan pengertian partisi- δ , maka akan diperlihatkan tentang eksistensi dari partisi- δ tersebut pada sebuah selang tertutup $[a, b]$.

Teorema 5

Untuk setiap fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terdapat suatu partisi- δ pada $[a, b]$.

Bukti

Misalkan $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi positif.

Untuk setiap $\xi \in [a, b]$, $\delta(\xi) > 0$ sehingga dapat dibentuk liput (u, v) yang memenuhi

$$\xi - \delta(\xi) < u < \xi < v < \xi + \delta(\xi)$$

yaitu I_ξ , sehingga dapat dibuat keluarga $\mathfrak{I}_\delta = \{I_\xi\}$.

$$\sigma = \{I_\xi | I_\xi \in \mathfrak{I}_\delta, \xi \in [a, b]\}$$

merupakan liput terbuka dari $[a, b]$, yaitu

$$[a, b] \subset \bigcup_{I_\xi \in \sigma} I_\xi.$$

Menurut Teorema 1 (Teorema Heine-Borel) terdapat liput terbuka bagian berhingga yaitu

$$\{I_{\xi_1}, I_{\xi_2}, \dots, I_{\xi_n}\} \subset \sigma \text{ sehingga } [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^n I_{\xi_j}.$$

Ambil $a \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = b$

Oleh karena $I_{\xi_{j-1}} \cap I_{\xi_j} \neq \emptyset$, sehingga dapat diambil

$$x_{j-1} \in I_{\xi_{j-1}} \cap I_{\xi_j} \text{ dengan } x_{j-1} = \frac{1}{2}(u_j + v_{j-1}), \quad j = 2, \dots, n$$

dan ambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$.

dengan x_{j-1} untuk setiap $j = 2, \dots, n$,

$$u_{j-1} < \xi_{j-1} < x_{j-1} < \xi_j < v_j$$

Jika diambil $x_0 = a$ dan $x_n = b$ maka diperoleh:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

dengan sifat

$$\xi_j - \delta(\xi_j) < x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j < \xi_j + \delta(\xi_j)$$

Untuk setiap $j = 1, 2, \dots, n$.

Jadi diperoleh

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

dengan sifat

$$\xi_j - \delta(\xi_j) < x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j < \xi_j + \delta(\xi_j)$$

□

Berikut ini akan diperlihatkan sifat dari partisi- δ yang akan dipergunakan dalam pembahasan selanjutnya.

Teorema 6

Misalkan $\delta_1, \delta_2, \delta$ masing-masing merupakan fungsi bernilai riil positif pada $[a, b]$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}, \quad \xi \in [a, b]$$

Jika D partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$.

Bukti

Misalkan D partisi- δ pada $[a, b]$ yang diberikan oleh

$$D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

dengan $\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Karena $\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}$

maka

$$\delta(\xi) \leq \delta_1(\xi) \text{ atau } \delta(\xi) \leq \delta_2(\xi).$$

Akibatnya

$$\xi_i - \delta_1(\xi_i) \leq \xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i$$

$$\leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i) \leq \xi_i + \delta_1(\xi_i)$$

dan juga

$$\xi_i - \delta_2(\xi_i) \leq \xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} \leq \xi_i$$

$$\leq x_i < \xi_i + \delta(\xi_i) \leq \xi_i + \delta_2(\xi_i)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Jadi D merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$ dan terbukti pula bahwa D partisi- δ lebih halus dari partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 . □

Dengan menggunakan partisi- δ seperti didefinisikan pada Definisi 4, Henstock membangun integral Riemann Lengkap yang selanjutnya disebut integral Henstock, yang didefinisikan seperti berikut ini.

Definisi 7

Suatu fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Henstock jika ada bilangan A sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ

$$D = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

Pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon$$

A disebut nilai integral Henstock fungsi f pada selang $[a, b]$ dan dinotasikan dengan

$$A = (H) \int_a^b f(x) dx.$$

dan $(D) \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ dinamakan jumlah Riemann

yang bersesuaian dengan partisi- δD pada selang $[a, b]$.

Sifat-Sifat Integral Henstock

Pada bagian ini akan dibahas beberapa sifat sederhana dari integral Henstock yang mana sifat-sifat tersebut merupakan sifat-sifat integral yang berlaku untuk integral Henstock.

Teorema 8 (Sifat ketunggalan integral Henstock)

Jika fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$, maka nilai integral itu tunggal.

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena f terintegral Henstock pada $[a, b]$ maka terdapat bilangan riil A_1 dan fungsi positif $\delta_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1

$D_1 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v - u) - A_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Misalkan f juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dengan nilai integral A_2 , terdapat fungsi positif $\delta_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum f(\xi)(v - u) - A_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}, \xi \in [a, b]$$

Menurut Teorema 6, jika $D = \{ [u, v]; \xi \}$ partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$.

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| &= \left| A_1 - (D) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ &\quad \left. + (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_2 \right| \\ &\leq \left| A_1 - (D) \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ &\quad + \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_2 \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_1 \right| \\ &\quad + \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A_2 \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka terbukti $A_1 = A_2$.
Jadi nilai A_1 tunggal. \square

Seperti halnya integral Riemann, sifat kelinieran juga berlaku pada integral Henstock, dan sifat ini diungkapkan dengan teorema di bawah ini.

Teorema 9

Jika fungsi-fungsi f dan g masing-masing terintegral Henstock pada $[a, b]$ dengan demikian maka $f + g$ dan αf untuk α bilangan riil juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan berlaku

$$(i). \quad (H) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (H) \int_a^b f(x) dx + (H) \int_a^b g(x) dx$$

$$(ii). \quad (H) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha (H) \int_a^b f(x) dx$$

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang.

(i). Misalkan

$$(H) \int_a^b f(x) dx = A \text{ dan } (H) \int_a^b g(x) dx = B.$$

Terdapat fungsi $\delta_1(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1 $D_1 = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan juga terdapat fungsi $\delta_2(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum g(\xi)(v-u) - B \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}, \xi \in [a, b].$$

Berdasarkan Teorema 6, jika $D = \{ [u, v]; \xi \}$ partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$. Karena itu untuk sebarang partisi- δ pada selang $[a, b]$ berlaku

$$\begin{aligned} &\left| (D) \sum (f + g)(\xi)(v-u) - (A + B) \right| \\ &= \left| (D) \sum (f(\xi) + g(\xi))(v-u) - (A + B) \right| \\ &= \left| (D) \sum (f(\xi)(v-u) + g(\xi)(v-u)) - A - B \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ &\quad \left. + (D) \sum g(\xi)(v-u) - A - B \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right. \\ &\quad \left. + (D) \sum g(\xi)(v-u) - B \right| \\ &\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \\ &\quad + \left| (D) \sum g(\xi)(v-u) - B \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga $f + g$ terintegral Henstock pada $[a, b]$, ini berarti $f + g$ terintegral Henstock ke $A + B$ dengan

$$\begin{aligned} (H) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= A + B \\ &= (H) \int_a^b f(x) dx + (H) \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

(ii). Jika $\alpha = 0$ maka jelas αf terintegral Henstock ke 0.
Untuk $\alpha \neq 0$.

Pilih fungsi $\delta_3(\xi) > 0$ pada $[a, b]$,

sehingga untuk setiap partisi- δ_3 $D_3 = \{ [u, v]; \xi \}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_3) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Misalkan $D = \{ [u, v]; \xi \}$ sebarang partisi- δ_3 pada $[a, b]$,

$$\text{maka} \quad \left| (D) \sum \alpha f(\xi)(v-u) - \alpha A \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \alpha \left((D) \sum f(\xi)(v-u) \right) - \alpha A \right| \\
&= \left| \alpha \left((D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right) \right| \\
&= |\alpha| \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \\
&< |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Sehingga

αf terintegral Henstock ke αA dengan

$$(H) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha A = \alpha (H) \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Lemma berikut ini adalah suatu kriteria untuk menyelidiki suatu fungsi terintegral Henstock tanpa mengetahui nilai integralnya. Kriteria ini sering disebut juga Kriteria Cauchy.

Lemma 10

Fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk sebarang partisi- δ

$D = \{[u, v]; \xi\}$ dan $D' = \{[u', v']; \xi'\}$ pada $[a, b]$

berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| < \varepsilon$$

Bukti

(i) Syarat cukup.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Terdapat $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk sebarang partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dengan $A = (H) \int_a^b f(x) dx$.

Jika $D = \{[u, v]; \xi\}$ dan $D' = \{[u', v']; \xi'\}$

partisi- δ pada $[a, b]$ berlaku juga

$$\left| (D') \sum f(\xi')(v'-u') - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

maka

$$\begin{aligned}
&\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| \\
&= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right. \\
&\quad \left. A - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| \\
&\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left| A - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| \\
&= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \\
&\quad + \left| (D') \sum f(\xi')(v'-u') - A \right|
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) Syarat perlu.

Misalkan $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan monoton turun yang konvergen ke 0 ($\varepsilon_n \rightarrow 0$).

Diketahui bahwa untuk setiap ε_n terdapat δ_n , $\delta_n(\xi) > 0$, $\xi \in [a, b]$,

sehingga untuk setiap partisi- δ_n

$D_n = \{[u, v]; \xi\}$ dan $D'_n = \{[u', v']; \xi'\}$ pada $[a, b]$

berlaku

$$\left| (D_n) \sum f(\xi)(v-u) - (D'_n) \sum f(\xi')(v'-u') \right| < \varepsilon_n$$

Definisikan $S_n = (D_n) \sum f(\xi)(v-u)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk barisan fungsi positif $\{\delta_n\}$

dengan $\delta_1(\xi) = \delta'_1(\xi)$ dan

$$\delta_n(\xi) = \min \{ \delta_{n-1}(\xi), \delta'_n(\xi) \}, n = 2, 3, 4, \dots \quad (a)$$

Ambil sebarang bilangan asli m dan n dengan $m > n$, terdapat

partisi- δ_n $D_n = \{[u, v]; \xi\}$ dan

partisi- δ_m $D_m = \{[u, v]; \xi\}$,

berdasarkan (a) maka $\delta_m < \delta_n$, yang berarti partisi- δ_m lebih halus dari partisi- δ_n .

Sehingga dipenuhi

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left| (D_n) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\
&\quad \left. - (D_m) \sum f(\xi)(v-u) \right| < \varepsilon_n
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon_n \rightarrow 0$, berarti $\{S_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Karena S_n merupakan bilangan riil, berarti barisan $\{S_n\}$ konvergen. Misalkan $S_n \rightarrow S$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_1 sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ di atas terdapat bilangan asli N_2 sehingga untuk setiap $n \geq N_2$ dipenuhi

$$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $N = \max \{N_1, N_2\}$.

Ambil $\delta < \delta_N$, dan partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ yang lebih halus dari partisi- δ_{N_1} ataupun partisi- δ_{N_2} .

Sehingga untuk sebarang partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\begin{aligned} & \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - S \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D_N) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + (D_N) \sum f(\xi)(v-u) - S \right| \\ &\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D_N) \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ & \quad + \left| (D_N) \sum f(\xi)(v-u) - S \right| \\ &< \varepsilon_n + |S_n - S| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi terbukti f terintegral Henstock ke S pada $[a, b]$. \square

Selanjutnya teorema-teorema di bawah ini menunjukkan berlakunya sifat-sifat umum integral pada integral Henstock. Seperti halnya berlaku pada integral Riemann, teorema berikut ini berlaku juga pada integral Henstock.

Teorema 11

Jika fungsi f terintegral Henstock pada $[a, c]$ dan pada $[c, b]$, dengan $a < c < b$, maka f juga terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan berlaku

$$(H) \int_a^b f(x) dx = (H) \int_a^c f(x) dx + (H) \int_c^b f(x) dx$$

Bukti.

Misalkan $(H) \int_a^c f(x) dx = A$ dan $(H) \int_c^b f(x) dx = B$.

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Terdapat fungsi positif $\delta_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1 $D_1 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, c]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Terdapat fungsi positif $\delta_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[c, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum f(\xi)(v-u) - B \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Didefinisikan fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \begin{cases} \min \{ \delta_1(\xi), c - \xi \}, & \text{jika } \xi \in [a, c) \\ \min \{ \delta_1(c), \delta_2(c) \}, & \text{jika } \xi \in c \\ \min \{ \delta_2(\xi), \xi - c \}, & \text{jika } \xi \in (c, b] \end{cases}$$

Ambil sebarang partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$.

Kemungkinan yang terjadi:

- (i). c merupakan salah satu titik partisi.
- (ii). c bukan merupakan salah satu titik partisi.

Maka

- (i). Jika c merupakan salah satu titik partisi.

Ambil partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ sehingga c merupakan salah satu titik partisi.

Jika $D' = \{[u, v]; \xi\}$ merupakan subpartisi- δ dari

$D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, c]$ dan $D'' = \{[u, v]; \xi\}$

merupakan subpartisi- δ dari $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada

$[c, b]$ maka D' merupakan partisi- δ_1 dan D'' merupakan subpartisi- δ_2 .

- (ii). Jika c bukan merupakan salah satu titik partisi, maka terdapat $\{[u, v]; \xi\}$ sehingga $c \in [u, v]$.

Kemudian kita buat partisi- δ D^* yang memuat

$([u, c], \xi)$ dan $([c, v], c)$ jika $u \leq \xi < c < v$

atau

$([u, c], c)$ dan $([c, v], \xi)$ jika $u < c < \xi \leq v$

Dengan demikian partisi- δ $D^* = \{[u, v]; \xi\}$ pada

$[a, b]$ merupakan penghalusan partisi- δ

$D = \{[u, v]; \xi\}$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (A+B) \right| \\ &\leq \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) \right. \\ & \quad \left. + (D_2) \sum f(\xi)(v-u) - A - B \right| \\ &\leq \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - A \right| \\ & \quad + \left| (D_2) \sum f(\xi)(v-u) - B \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi fungsi f terintegral Henstock ke $A + B$ pada $[a, b]$, dan berlaku

$$(H) \int_a^b f(x) dx = (H) \int_a^c f(x) dx + (H) \int_c^b f(x) dx$$

Terbukti \square

Dengan adanya Teorema 11 di atas maka untuk menentukan bahwa suatu fungsi terintegral Henstock atau tidak pada $[a, b]$ dapat diperlihatkan melalui keterintegralan fungsi tersebut pada interval-interval

bagian yang banyaknya berhingga dalam $[a, b]$ yang tidak saling tumpang tindih sehingga gabungannya sama dengan $[a, b]$.

Teorema 12

Jika $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$ maka f juga terintegral Henstock pada setiap selang bagian $[c, d] \subset [a, b]$.

Bukti

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Menurut Lemma 10, dapat dipilih fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ dan $D' = \{[u', v']; \xi'\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (D') \sum f(\xi')(v'-u') \right| < \varepsilon$$

Ambil sebarang partisi- δ D_1 dan D_2 pada $[c, d]$ masing-masing dengan jumlah Riemann S_1 dan S_2 .

Ambil juga partisi- δ D_3 pada $[a, c] \cup [d, b]$ dengan jumlah Riemann S_3 .

Diperoleh $P = D_1 \cup D_3$ dan $P' = D_2 \cup D_3$ merupakan partisi- δ pada $[a, b]$, masing-masing dengan jumlah Riemann $S_1 + S_3$ dan $S_2 + S_3$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - (D_2) \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ &= |S_1 - S_2| \\ &= |S_1 + S_3 - S_2 - S_3| \\ &= |(S_1 + S_3) - (S_2 + S_3)| \\ &= \left| (P) \sum f(\xi)(v-u) - (P') \sum f(\xi)(v-u) \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Menurut Lemma 10, f terintegral Henstock pada $[c, d]$ \square

Teorema 13

Jika $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, maka f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $(H) \int_a^b f(x) dx = 0$.

Bukti

Diketahui $f(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, berarti terdapat $X \subset [a, b]$ dengan $\mu(X) = 0$ sehingga

$$f(x) \begin{cases} = 0, & \text{Jika } x \notin X \\ \neq 0, & \text{Jika } x \in X \end{cases}$$

Selanjutnya didefinisikan

$$X_i = \left\{ x \in [a, b] \mid i-1 < |f(x)| \leq i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

sehingga $\mu(X_i) = 0$, sehingga berlaku $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap i , terdapat barisan selang terbuka $\{I_{ij}\}$ sehingga $X_i \subset \bigcup_j I_{ij}$ dengan

$$\mu(I_{ij}) < \varepsilon 2^{-(i+j)} i^{-1}$$

Didefinisikan $\delta(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga:

- (i). $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) \subset I_{ij}$, jika $\xi \in X_i, i = 1, 2, \dots$
- (ii). $\delta(\xi)$ diambil sebarang, jika $\xi \notin X_i, i = 1, 2, \dots$

Jika $D = \{[u, v]; \xi\}$ sebarang partisi- δ pada $[a, b]$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) \right| &\leq \left| \sum_{\xi \in X} f(\xi)(v-u) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} i \varepsilon 2^{-(i+j)} i^{-1} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan

$$(H) \int_a^b f(x) dx = 0 \quad \square$$

Teorema 13 tersebut merupakan kejadian khusus pada integral Henstock yang tidak berlaku pada integral Riemann. Selanjutnya berdasarkan Teorema 13 diperoleh akibat berikut.

Akibat 14

Jika f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $g(x) = f(x)$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$ maka g terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan

$$(H) \int_a^b g(x) dx = (H) \int_a^b f(x) dx$$

Bukti

Misal fungsi $h = g - f$, diperoleh $h(x) = 0$ hampir dimana-mana pada $[a, b]$, menurut Teorema 13 di atas maka h terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $(H) \int_a^b h(x) dx = 0$.

Karena h dan f terintegral Henstock pada $[a, b]$, dan $g = h + f$, berdasarkan Teorema 9, diperoleh g terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan

$$\begin{aligned} (H) \int_a^b g(x) dx &= (H) \int_a^b h(x) dx + (H) \int_a^b f(x) dx \\ &= 0 + (H) \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

$$= (H) \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Berikut ini merupakan teorema yang digeneralisasi dari sifat yang berlaku pada integral Riemann.

Teorema 15

Jika f dan g masing-masing terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ hampir untuk semua $x \in [a, b]$ maka

$$(H) \int_a^b f(x) dx \leq (H) \int_a^b g(x) dx$$

Bukti

Dengan tidak mengurangi keumuman dapat dianggap $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Terdapat fungsi $\delta_1(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_1 $D_1 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat fungsi $\delta_2(\xi) > 0$ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi- δ_2 $D_2 = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D_2) \sum g(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Definisikan fungsi $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$\delta(\xi) = \min \{ \delta_1(\xi), \delta_2(\xi) \}.$$

Menurut Teorema 6, jika $D = \{[u, v]; \xi\}$ partisi- δ pada $[a, b]$, maka D juga merupakan partisi- δ_1 dan partisi- δ_2 pada $[a, b]$.

Jadi untuk sebarang partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left| (D) \sum g(\xi)(v-u) - (H) \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$\begin{aligned} (H) \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} &\leq (D) \sum f(\xi)(v-u) \\ &\leq (D) \sum g(\xi)(v-u) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + (H) \int_a^b g(x) dx$$

diperoleh

$$(H) \int_a^b f(x) dx \leq (H) \int_a^b g(x) dx + \varepsilon$$

Karena sebarang $\varepsilon > 0$, maka

$$(H) \int_a^b f(x) dx \leq (H) \int_a^b g(x) dx \quad \square$$

Misalkan fungsi $f: [a, b] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ terintegral Henstock pada $[a, b]$. Berdasarkan Teorema 12, untuk setiap $x \in [a, b]$ fungsi f juga terintegral Henstock pada $[a, x] \subset [a, b]$. Sehingga dapat didefinisikan fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$F(x) = (H) \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

dan selanjutnya F disebut fungsi primitif Henstock fungsi f pada $[a, b]$. Dengan demikian definisi integral Henstock dapat pula ditulis sebagai berikut.

Definisi 16

Fungsi terukur f dikatakan terintegral Henstock pada $[a, b]$ jika ada fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\begin{aligned} &\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(a, b) \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &\quad < \varepsilon \end{aligned}$$

dengan $F(u, v) = F(v) - F(u)$.

Teorema berikut ini merupakan sebuah sifat dari integral Henstock yang sering disebut sebagai Lemma Henstock.

Teorema 17 (Lemma Henstock)

Jika fungsi f terintegral Henstock pada $[a, b]$, yaitu terdapat fungsi $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ $D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| < \varepsilon$$

maka untuk setiap partisi bagian D_1 dari D berlaku

$$\left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| < 2\varepsilon$$

Bukti

Ambil sebarang partisi- $\delta D = \{[u, v]; \xi\}$ pada $[a, b]$.

Ambil D_1 sebarang subpartisi- δ dari D , sebut :

$$J_i = [u_i, v_i] \text{ jika } ([u_i, v_i]; \xi_i) \in D_1$$

$$I_k = [u_k, v_k] \text{ jika } ([u_k, v_k]; \xi_k) \in D - D_1$$

Karena f terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan $I_k \subset [a, b]$ untuk setiap k , menurut Teorema 11, f terintegral Henstock pada I_k untuk setiap k .

Sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ_k , $\delta_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap partisi- δ_k

$D_k = \{[u, v]; \xi\}$ pada I_k berlaku

$$\left| (D_k) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| < 2^{-k} \varepsilon$$

$$\text{Jadi } D = D_1 \bigcup \left(\bigcup_k D_k \right).$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (D_1) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &= \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right. \\ &\quad \left. - \sum_k (D_k) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &\leq \left| (D) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right. \\ &\quad \left. + \sum_k (D_k) \sum f(\xi)(v-u) - F(u, v) \right| \\ &< \varepsilon + \sum_k \varepsilon 2^{-k} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

KESIMPULAN

Dari uraian ini dapat disimpulkan bahwa:

Pendefinisian integral Henstock didasarkan atas partisi- δ , dimana partisi tersebut merupakan sebuah fungsi positif $\delta(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Partisipasi diperoleh dengan menggantikan konstanta positif δ pada konstruksi integral Riemann.

Sifat-sifat dasar yang berlaku pada integral Riemann berlaku pada integral Henstock, yang mana sifat-sifat dasar integral Henstock lebih konstruktif.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., (1994), *Introduction to Real Analysis*, Second Edition, John Wiley & Sons. Inc, New York.
- Gordon, R. A., (1994), *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies

in Mathematics 4, American Mathematical Society, Providence.

- Guoju, Y. & Tianqing, A., (1998), *On Henstock-Dunford and Henstock Pettis Integral*, 12 hlm, Hindawi Publishing Corp, <http://ijmms.hindawi.com>. 08 Januari 2005, Pk. 17.00 WIT
- Lee, P. Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Series in Real Analysis vol. 2, World Scientific, Singapore.
- Royden, H. L., (1987), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.
- Rudin, W., (1976), *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, Mc Graw-Hill Kogakusha. Ltd, Tokyo.
- Schecter, E. (2001). *An Introduction to The Gauge Integral*. 10 hlm. <http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/>. 08 Januari 2005, pk. 18.47 WIT.
- Sinay, L. J. (2005), *Integral Henstock dan Sifat-Sifatnya*, Skripsi S1 pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura, Ambon.
- Soemantri, R., (1988), *Analisis Real I*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.
- Thobirin, A. (1997). *Beberapa Integral Jenis Riemann*. Tesis Magister pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

